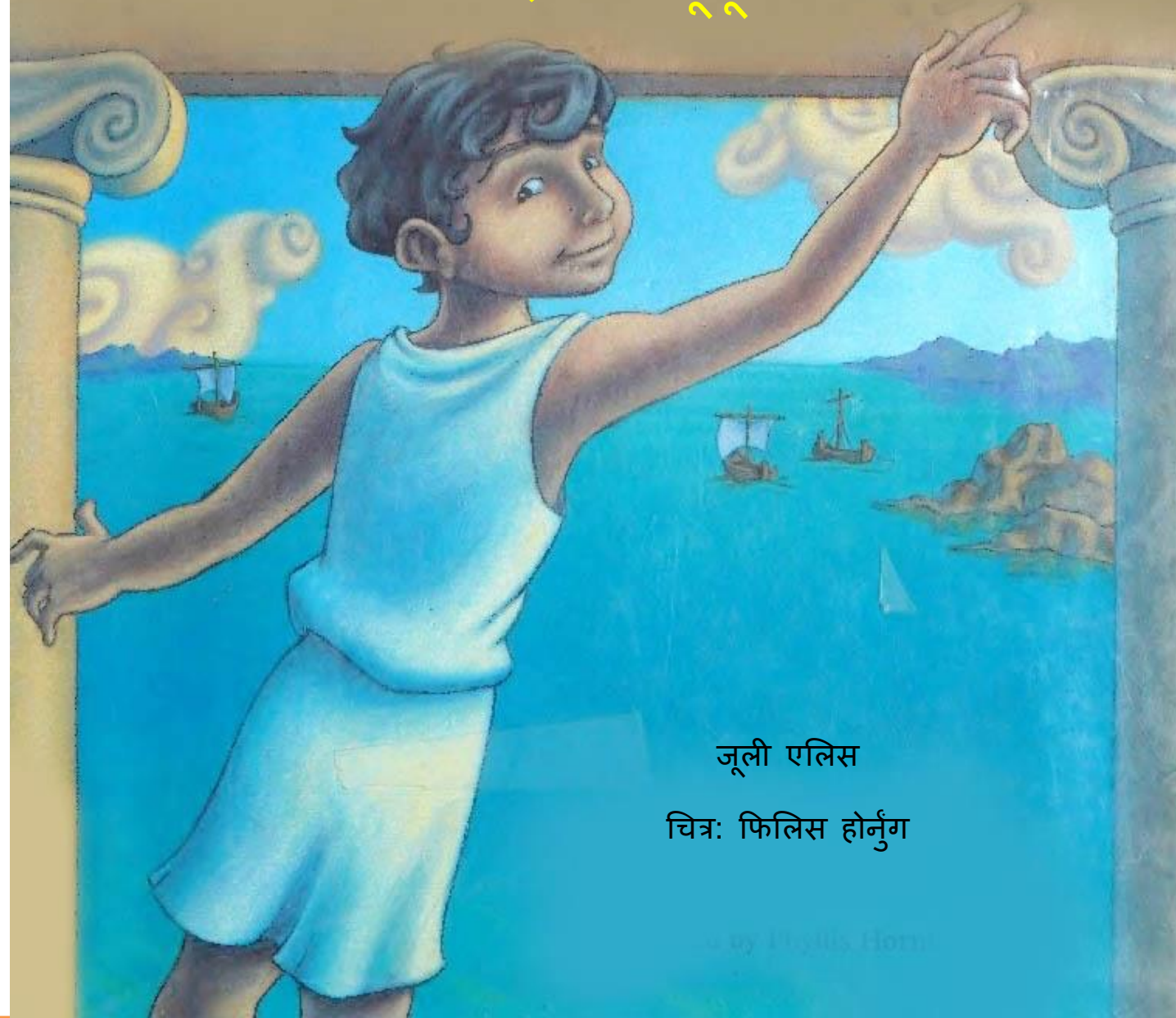


पाइथागोरस

आपका कोण क्या है?

गणित का जूनून



जूली एलिस

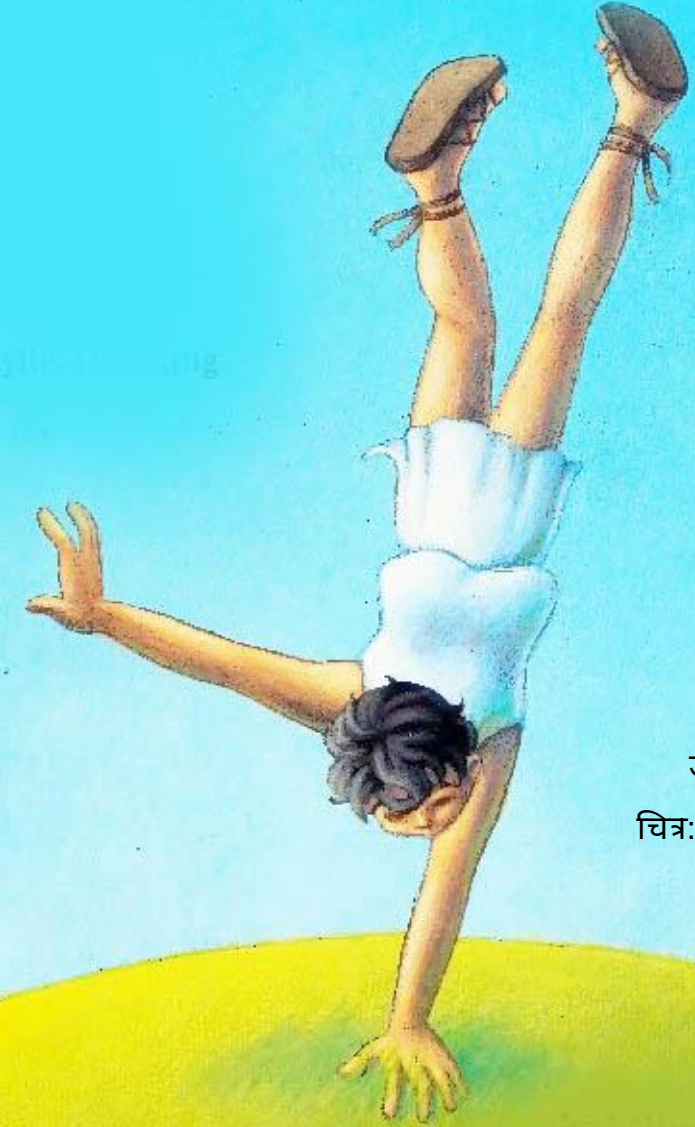
चित्र: फिलिस होर्नुग

by Phyllis Horn

पाइथागोरस आपका कोण क्या है?

गणित का जूनून

by Phyllis Hoernig



जूली एलिस
चित्र: फिलिस होर्नुग



बहुत समय पहले प्राचीन ग्रीस में पाइथागोरस नाम का एक जिज्ञासु लड़का रहता था.

पाइथागोरस हर जगह अपनी नाक को घुसाने से कभी बाज़ नहीं आता था. कभी-कभी, उसकी जिज्ञासा उसे बड़ी परेशानी में डाल देती थी, लेकिन कभी-कभी उसका अच्छा फल भी निकलता था.

एक दिन, पाइथागोरस एक पुराने जैतून के पेड़ की छाया में बैठा था. जहां वो रहता था वहां से वो अपने द्वीप के चारों का बंदरगाह को और चमचमाते नीले समुद्र को देख सकता था.

पास ही दो मजदूर एक मंदिर का निर्माण कर रहे थे. वे बहस करने लगे. "यह सीढ़ी छत तक पहुंचने के लिए बहुत छोटी है," पेप्रोस ने बड़बड़ाते हुए कहा.

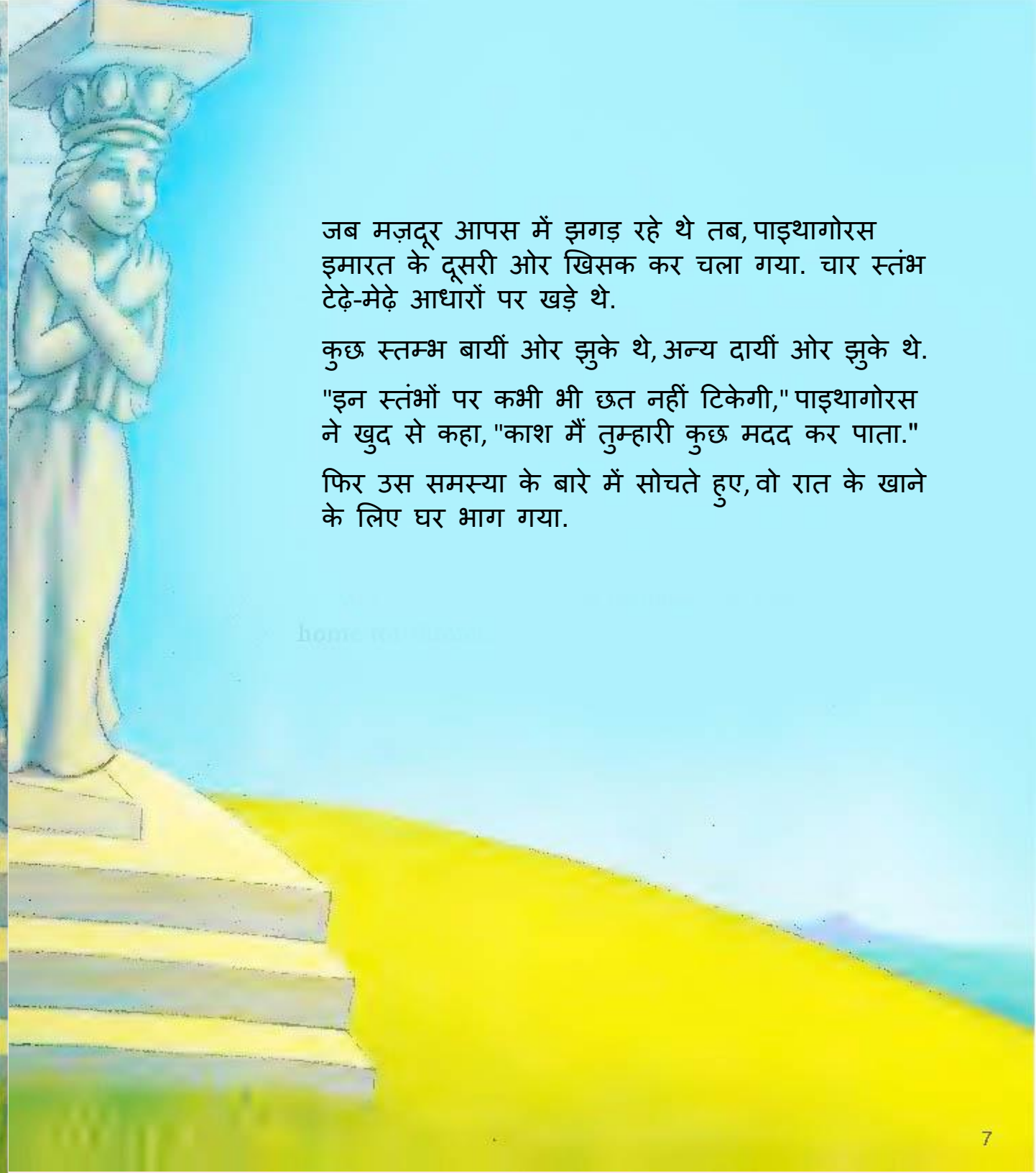
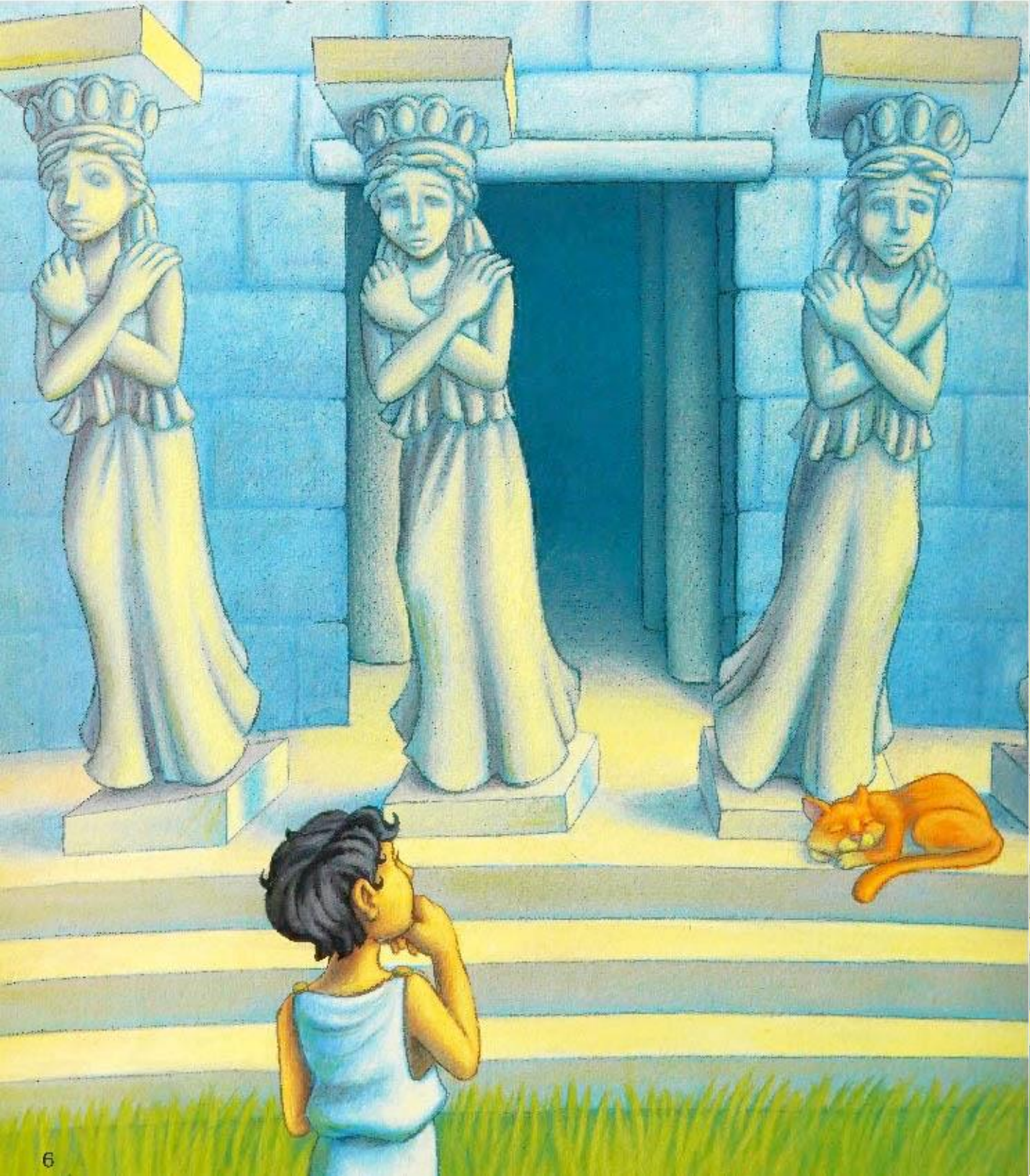
"यह संभव नहीं है," साल्टोस ने कहा. "दीवार 12 फीट ऊंची है, इसलिए मैंने 12 फीट लंबी ही सीढ़ी बनाई है."

पेप्रोस ने दहाड़ते हुए कहा, "सीढ़ी छत तक तभी पहुँचती है जब वो दीवार के सामने एकदम सपाट होती है, और तब उसपर कोई चढ़ नहीं सकता है! तुमने सीढ़ी नहीं बल्कि एक खम्बा बनाया है!"

पाइथागोरस ने पेड़ के पीछे से अपना सिर बाहर निकाला. "लेकिन खम्बे में क्या खराबी है?" उसने पूछा.

पेप्रोस ने भौंहे सिकोड़ लीं. "अच्छा, फिर से वही खतरनाक पाइथागोरस!"

"हमें परेशान करना बंद करो! नहीं तो हम मंदिर का निर्माण कभी पूरा नहीं कर पाएंगे!"



जब मज़दूर आपस में झगड़ रहे थे तब, पाइथागोरस इमारत के दूसरी ओर खिसक कर चला गया. चार स्तंभ टेढ़े-मेढ़े आधारों पर खड़े थे.

कुछ स्तम्भ बायीं ओर झुके थे, अन्य दायीं ओर झुके थे.

"इन स्तंभों पर कभी भी छत नहीं टिकेगी," पाइथागोरस ने खुद से कहा, "काश मैं तुम्हारी कुछ मदद कर पाता."

फिर उस समस्या के बारे में सोचते हुए, वो रात के खाने के लिए घर भाग गया.

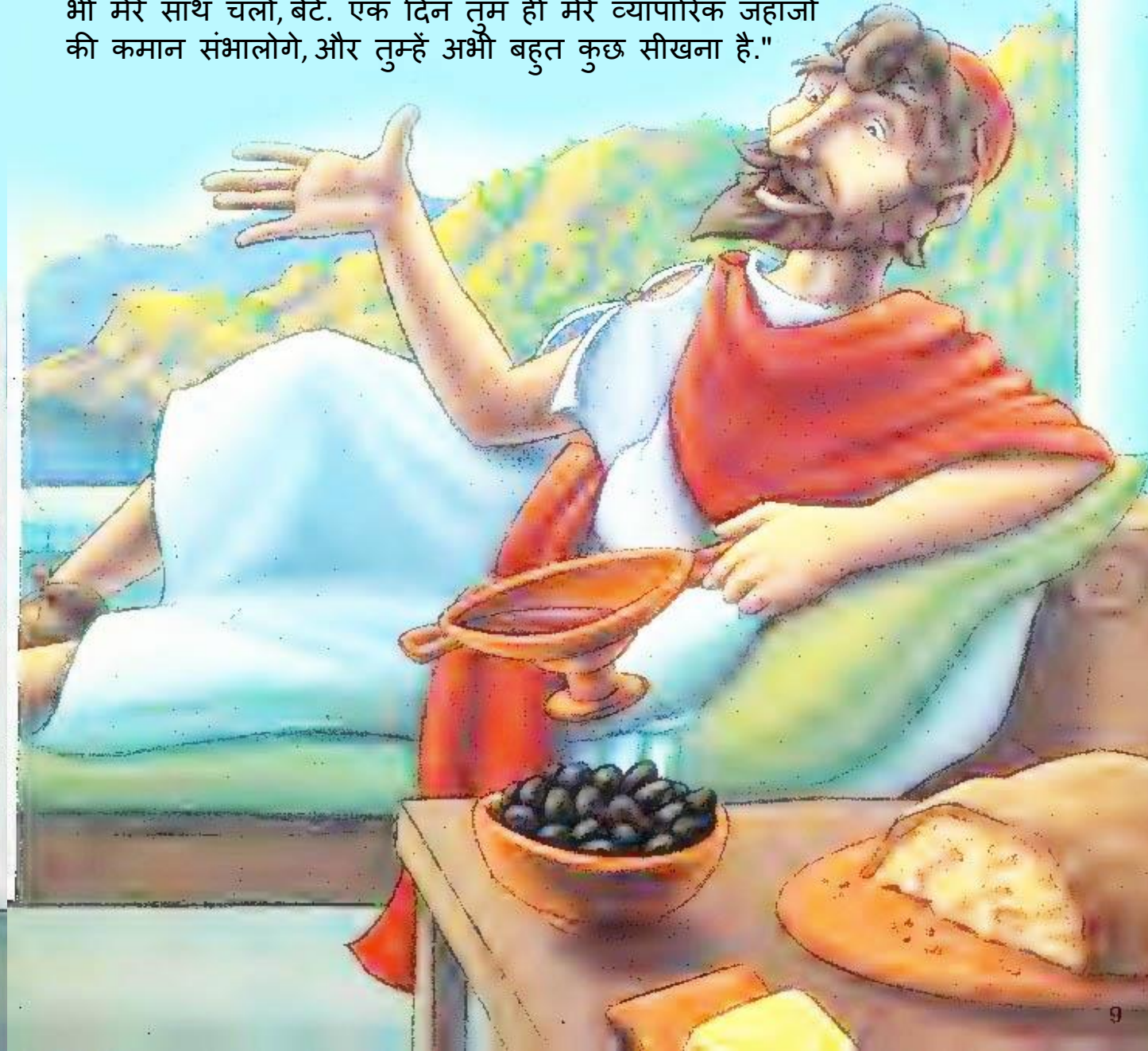
home return

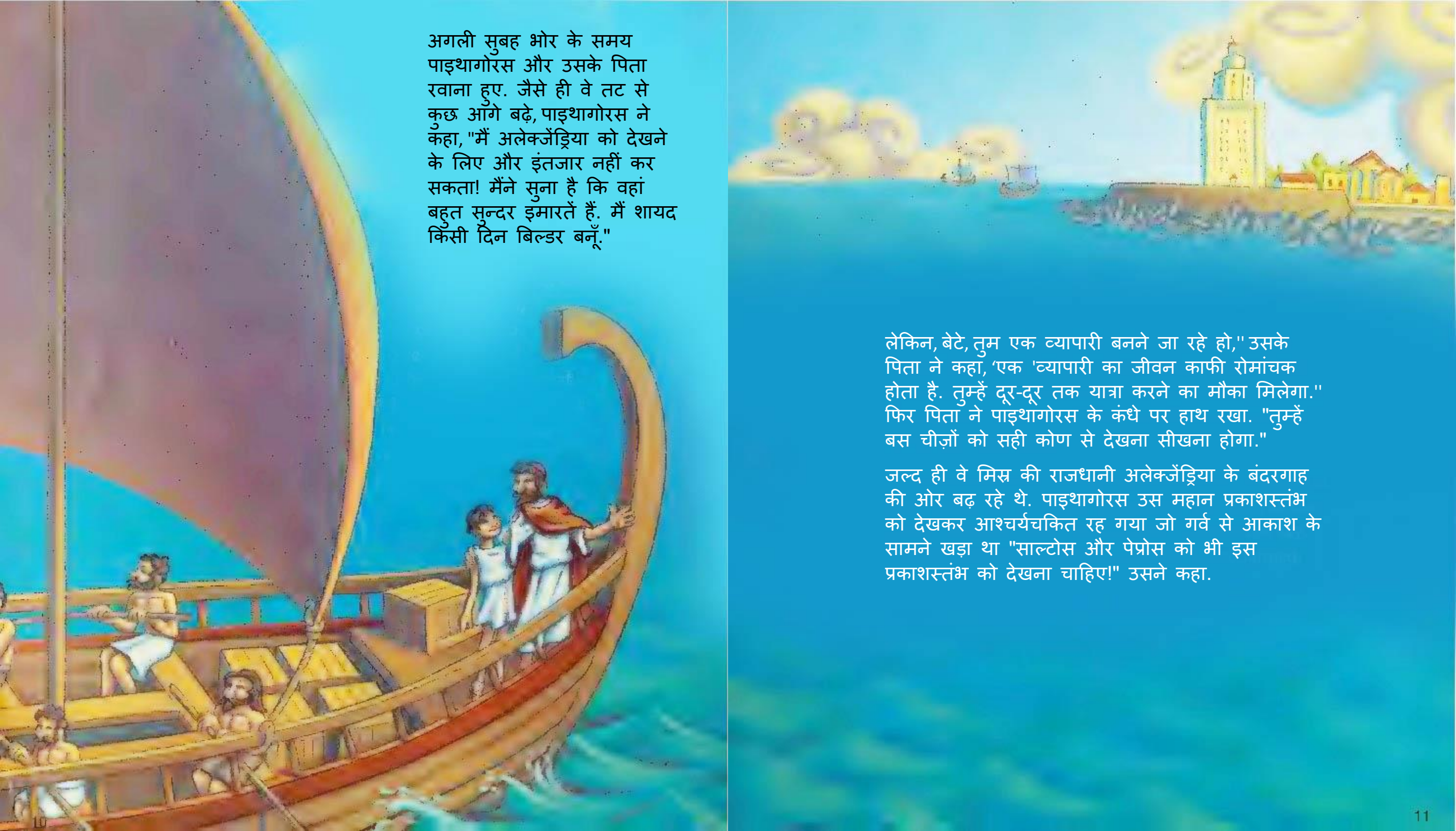
जब वो घर पहुंचा तो उसके पिता अपने जहाज के बारे में बातें कर रहे थे।
"मैं जहाज पर टाइल्स भरकर क्रेते के लिए रवाना हुआ, लेकिन लीपस और बाउंडस मुझसे पहले वहां पहुंच गए। तेजी से चलने वाले अपने नए जहाज के कारण वे मेरे सभी ग्राहक भी छीनकर ले गए।"

रोटी और जैतून का कौर खाते हुए, पाइथागोरस ने पूछा, "पिताजी, आप हमेशा पहले रोड्स और फिर क्रेते जाते हैं। आप यहां से सीधे क्रेते क्यों नहीं जाते? फिर आप वहां बहुत जल्दी पहुंच जायेंगे।"

"वो बहुत खतरनाक होगा," उसके पिता ने उत्तर दिया। "यहां से सीधे क्रेते तक जाना सुरक्षित नहीं होगा, क्योंकि मुझे क्रेते की सटीक दूरी भी पता नहीं है। खुले समुद्र में, फिर मैं क्रेते को छोड़कर किसी अन्य अनजान जगह पहुंच सकता हूं!"

"मैं कल मिस्र के लिए रवाना हो रहा हूं। मैं चाहता हूं कि तुम भी मेरे साथ चलो, बेटे। एक दिन तुम ही मेरे व्यापारिक जहाजों की कमान संभालोगे, और तुम्हें अभी बहुत कुछ सीखना है।"





अगली सुबह भोर के समय पाइथागोरस और उसके पिता रवाना हुए. जैसे ही वे तट से कुछ आगे बढ़े, पाइथागोरस ने कहा, "मैं अलेक्जेंड्रिया को देखने के लिए और इंतजार नहीं कर सकता! मैंने सुना है कि वहां बहुत सुन्दर इमारतें हैं. मैं शायद किसी दिन बिल्डर बनूँ."

लेकिन, बेटे, तुम एक व्यापारी बनने जा रहे हो," उसके पिता ने कहा, 'एक 'व्यापारी का जीवन काफी रोमांचक होता है. तुम्हें दूर-दूर तक यात्रा करने का मौका मिलेगा.'" फिर पिता ने पाइथागोरस के कंधे पर हाथ रखा. "तुम्हें बस चीजों को सही कोण से देखना सीखना होगा."

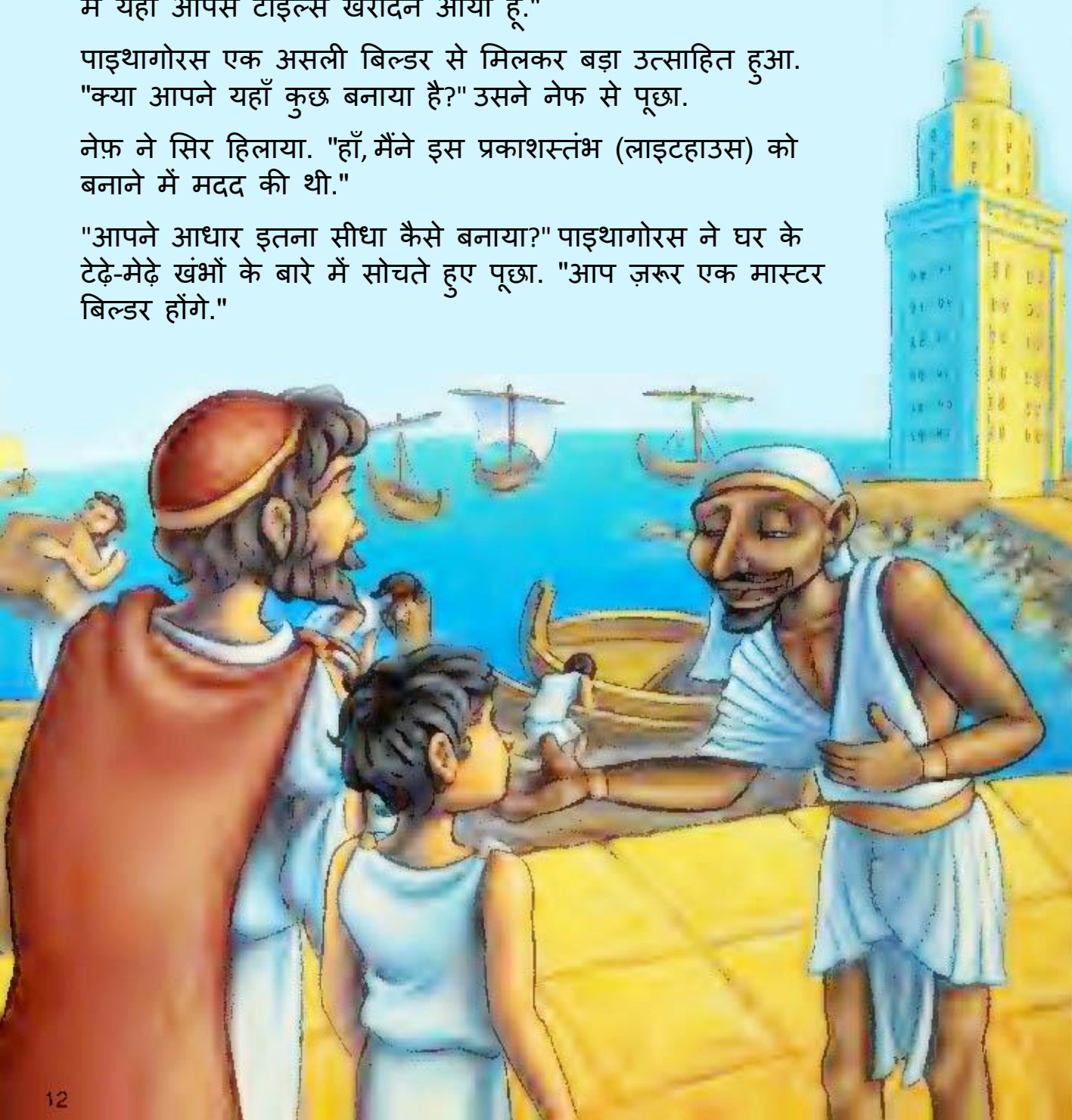
जल्द ही वे मिस्र की राजधानी अलेक्जेंड्रिया के बंदरगाह की ओर बढ़ रहे थे. पाइथागोरस उस महान प्रकाशस्तंभ को देखकर आश्चर्यचकित रह गया जो गर्व से आकाश के सामने खड़ा था "साल्टोस और पेप्रोस को भी इस प्रकाशस्तंभ को देखना चाहिए!" उसने कहा.

गोदी पर एक आदमी ने उनका स्वागत किया. "मैं बिल्डर नेफ़रहेपरहरसेकीपर हूँ, लेकिन लोग मुझे नेफ़ कहते हैं. मैं यहां आपसे टाइल्स खरीदने आया हूँ."

पाइथागोरस एक असली बिल्डर से मिलकर बड़ा उत्साहित हुआ. "क्या आपने यहाँ कुछ बनाया है?" उसने नेफ़ से पूछा.

नेफ़ ने सिर हिलाया. "हाँ, मैंने इस प्रकाशस्तंभ (लाइटहाउस) को बनाने में मदद की थी."

"आपने आधार इतना सीधा कैसे बनाया?" पाइथागोरस ने घर के टेढ़े-मेढ़े खंभों के बारे में सोचते हुए पूछा. "आप ज़रूर एक मास्टर बिल्डर होंगे."



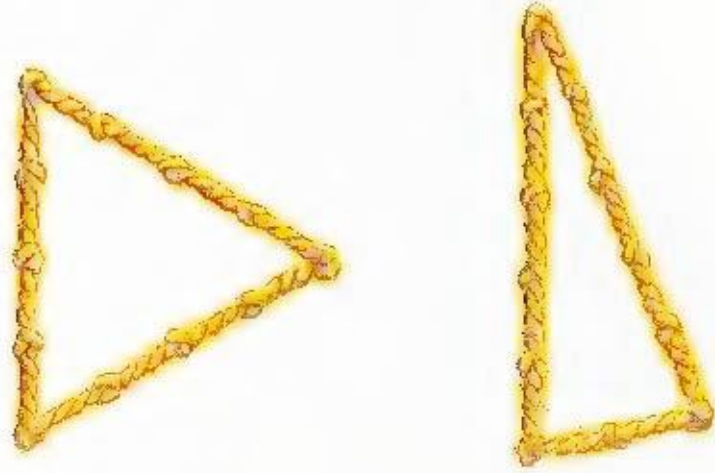
नेफ़ मुस्कराया और अपनी छाती बाहर फुलाई. "उसके पीछे का रहस्य यह विशेष रस्सी है जिसका उपयोग मेरे परिवार ने सदियों से किया है."

"क्या आप पत्थर काटने के लिए गांठदार रस्सी का उपयोग करते हैं?" पाइथागोरस ने पूछा.

नेफ़ हँसा. "मेरे प्यारे लड़के, मेरी रस्सी पत्थर नहीं काटती है! मैं रस्सी का उपयोग एक विशेष त्रिकोण बनाने के लिए करता हूँ. मैं इसे 'समकोण त्रिकोण' कहता हूँ क्योंकि वो मुझे एक अच्छा, चौकोर कोना बनाने में मदद करती है जो पत्थर काटने के लिए बिल्कुल सही कोण होता है."



नेफ ने पाइथागोरस को अपनी रस्सी पकड़ने दी. पाइथागोरस ने कुछ त्रिभुज बनाए, लेकिन उसके किसी भी त्रिकोण में समकोण नहीं था.
"आप प्रत्येक भुजा को कितना लम्बा बनाते हैं?" उसने पूछा.



"ओह, मैंने तुम्हें पहले ही बहुत कुछ दिखा दिया है," नेफ ने हँसते हुए कहा. फिर उसने अपनी रस्सी वापस ले ली. "चलो, तुम भी हमारे साथ चलो?"



जब उसके पिता और नेफ बात कर रहे थे, तब पाइथागोरस को रस्सी का एक पुराना टुकड़ा मिला और उसने उसमें गांठें बांध दीं. उसने रस्सी को अलग-अलग त्रिकोणों में खींचा.

अंत में, उसने एक त्रिभुज बनाया जो उसे एकदम सही लगा. उसकी एक भुजा की लंबाई 3 थी, दूसरी भुजा की लंबाई 4 थी, और सबसे लंबी भुजा की लंबाई 5 थी.
"समझ में आ गया!" उसने खुद से कहा.



तभी पाइथागोरस के पिता ने उसे बुलाया. "बेटा, तुम टाइल्स का यह टोकरा उठाओ. नेफ और मैं बाकी टाइल्स ले जायेंगे"

"मैं उन्हें ज़रूर ले जाता," नेफ ने आह भरी, "लेकिन मेरे अंगूठे में चोट लगी है इसलिए मैं उन्हें नहीं ले जा पाऊंगा. माफ करे, अब आपको दो चक्कर लगाने पड़ेंगे."

जब वे उस घर के पास पहुंचे जिसे नेफ बना रहा था, तो नेफ ने कहा, "जब तक आप बाकी टाइलें लाएंगे तब तक मैं वो पैसे लेकर आऊंगा जो मुझे आपको देने हैं." फिर बड़बड़ाते हुए, पाइथागोरस के पिता वापस जहाज की ओर चले गए.

नेफ ने पाइथागोरस के सिर को थपथपाया. "एक अच्छे लड़के जैसे मेरी इन टाइल्स की देखभाल करो. और देखो किसी भी चीज़ को हाथ मत लगाना!" यह कहते हुए नेफ घर में गायब हो गया.



पाइथागोरस ने धूप वाले आंगन के चारों ओर देखा. वहां बीच में पत्थर से बनी एक मूर्ति का आधार खड़ा था.

उसने यह देखने के लिए टोकरे से कुछ टाइलें निकालीं कि वे आधार के चारों ओर कैसी दिखेंगी. "मैं उन्हें जल्दी से वापस रख दूंगा," उसने सोचा.

उसने मूर्ति के आधार के एक तरफ तीन लाल टाइलों की एक पंक्ति बनाई. उसने लाल टाइलों की दो और पंक्तियाँ जोड़ीं, जिससे वो एक वर्ग बन गया.





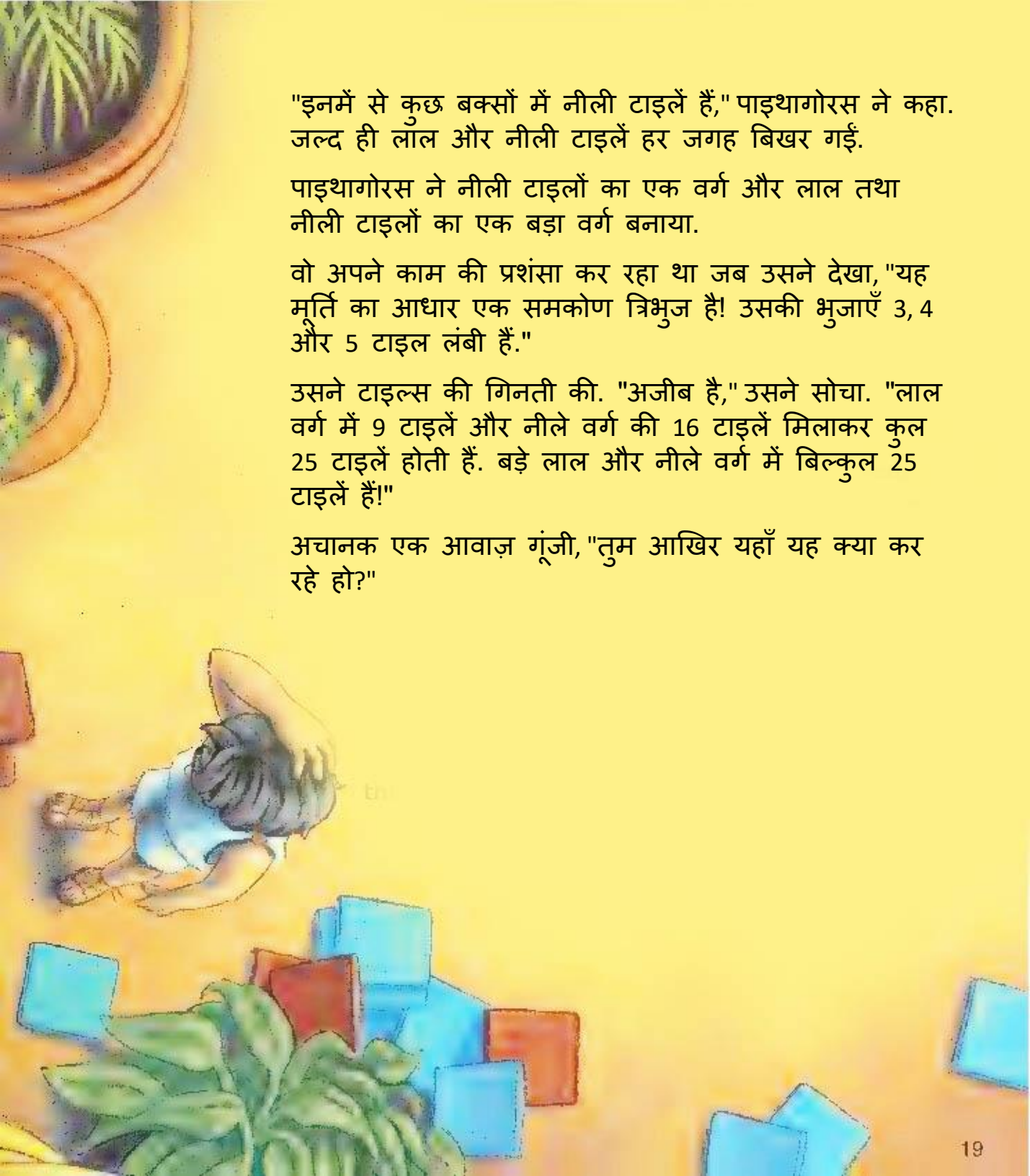
"इनमें से कुछ बक्सों में नीली टाइलें हैं," पाइथागोरस ने कहा. जल्द ही लाल और नीली टाइलें हर जगह बिखर गईं.

पाइथागोरस ने नीली टाइलों का एक वर्ग और लाल तथा नीली टाइलों का एक बड़ा वर्ग बनाया.

वो अपने काम की प्रशंसा कर रहा था जब उसने देखा, "यह मूर्ति का आधार एक समकोण त्रिभुज है! उसकी भुजाएँ 3, 4 और 5 टाइल लंबी हैं."

उसने टाइल्स की गिनती की. "अजीब है," उसने सोचा. "लाल वर्ग में 9 टाइलें और नीले वर्ग की 16 टाइलें मिलाकर कुल 25 टाइलें होती हैं. बड़े लाल और नीले वर्ग में बिल्कुल 25 टाइलें हैं!"

अचानक एक आवाज़ गूजी, "तुम आखिर यहाँ यह क्या कर रहे हो?"



नेफ़ आँगन में दौड़ा आया. पाइथागोरस के पिता उसके ठीक पीछे थे.

"यह सब क्या है?" नेफ़ ने तड़ककर पूछा.

"मुझे खेद है," पाइथागोरस ने कहा. "मैं टाइल्स वापस रखने जा रहा था. लेकिन मुझे उनसे कुछ दिलचस्प बातें पता चलीं."

"मुझे इसकी परवाह नहीं कि तुमने क्या पाया!" नेफ़ को उसे टोकते हुई कहा. "ज़रा इस गंदगी को देखो!"

"पाइथागोरस, टाइल्स उठाओ," उसके पिता ने सख्ती से कहा.

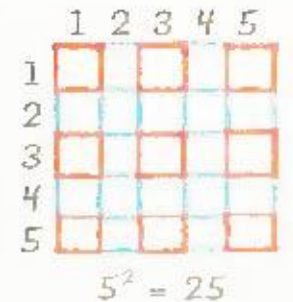
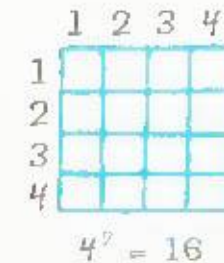
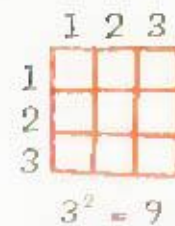
"और जल्दी करो - अभी हमें कई और जगह भी जाना है."



अगले दिन, पाइथागोरस और उसके पिता घर के लिए रवाना हुए. समय बिताने के लिए, पाइथागोरस ने अपने द्वारा बनाए गए टाइल वर्गों का एक चित्र बनाया.

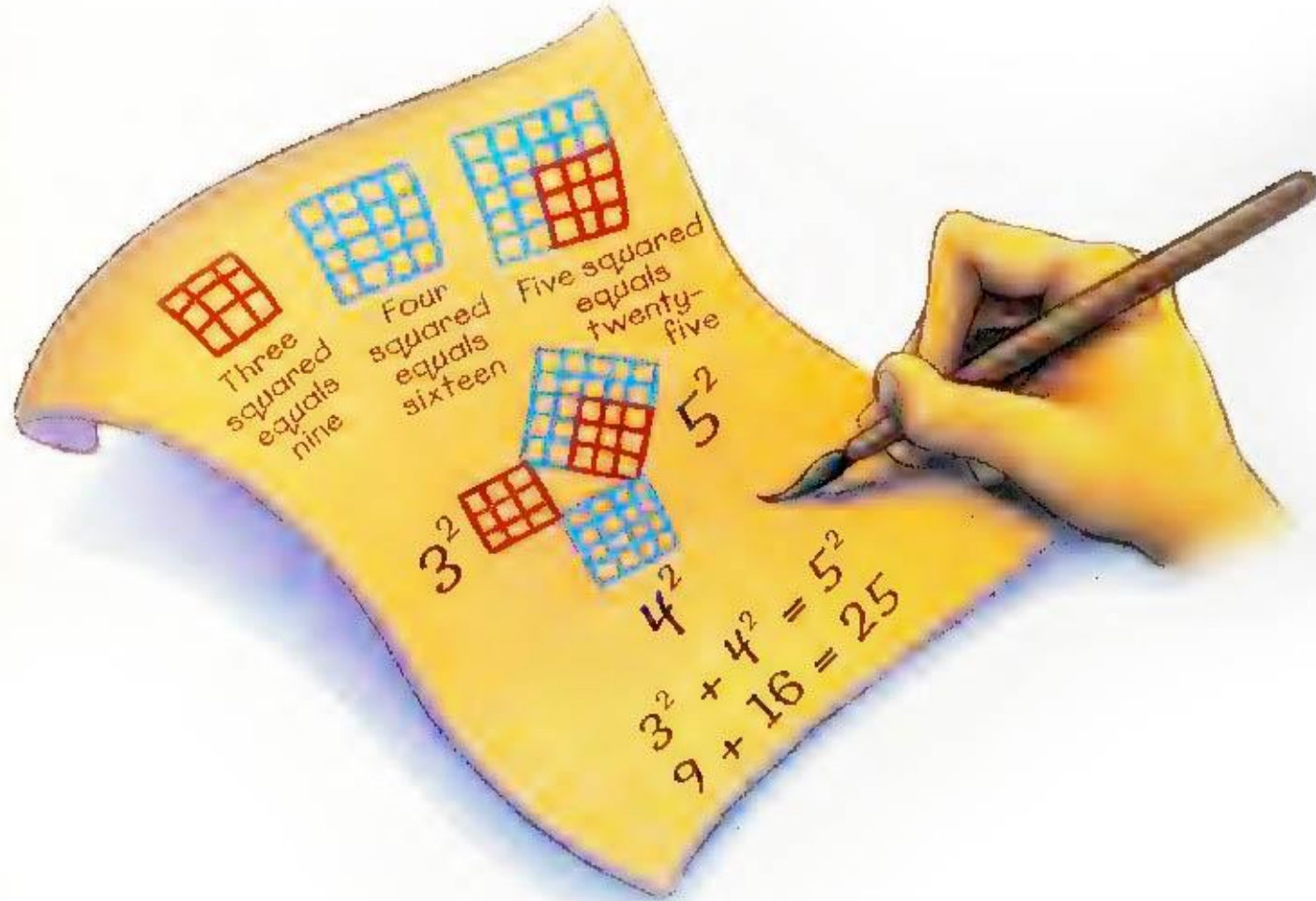
"जिस वर्ग की प्रत्येक भुजा पर 3 टाइलें थीं, उसमें 9 टाइलें थीं, जिसके प्रत्येक भुजा पर 4 टाइलें थीं, उसमें 16 टाइलें थीं और जिसकी प्रत्येक भुजा पर 5 टाइलें थीं, उसमें 25 टाइलें थीं.

"तो, एक वर्ग में, एक भुजा की लंबाई, स्वयं से गुणा करके पूरे वर्ग में टाइलों की संख्या होगी. जब मैं किसी संख्या को उसी से गुणा करता हूँ तो मैं उसे 'वर्ग' कहूंगा. तीन गुणा तीन, तीन का वर्ग होगा. मैं उसे 3×3 लिखूंगा."

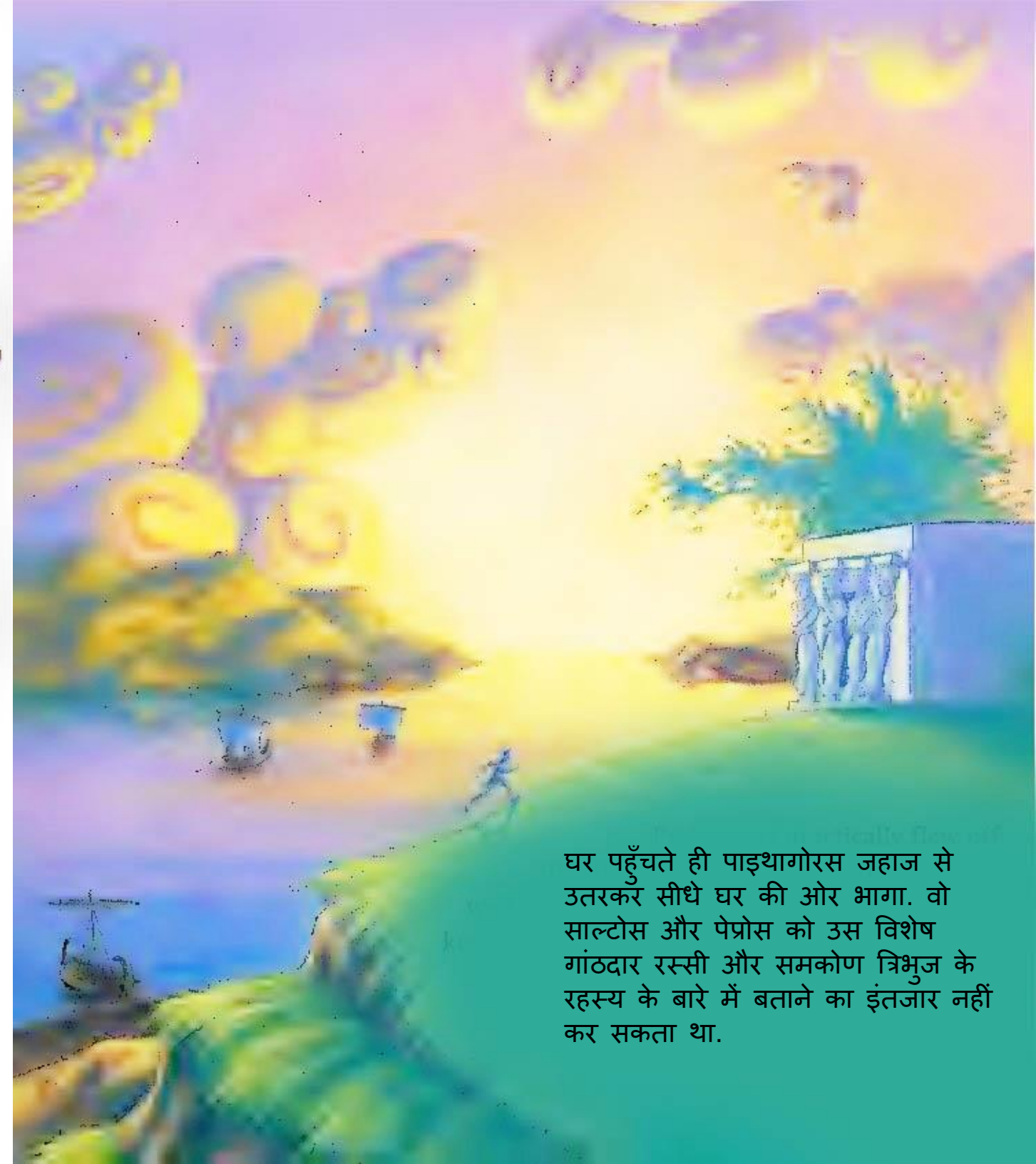


पाइथागोरस ने एक नया चित्र खींचा.

"तीन वर्ग और चार वर्ग बराबर पाँच वर्ग होते हैं," उसने खुद से कहा.



"मुझे आश्चर्य है कि क्या अन्य समकोण त्रिभुजों की भुजाओं के वर्गों का योग भी इसी प्रकार होगा?" उसने सोचा.



घर पहुँचते ही पाइथागोरस जहाज से उतरकर सीधे घर की ओर भागा. वो साल्टोस और पेप्रोस को उस विशेष गांठदार रस्सी और समकोण त्रिभुज के रहस्य के बारे में बताने का इंतजार नहीं कर सकता था.

जब वह अधूरे मंदिर में पहुंचा, तो साल्टोस और पेप्रोस वहां नहीं थे। सीढ़ी ज़मीन पर पड़ी थी जहाँ पेप्रोस ने उसे फेंका था।

"उस सीढ़ी पर तब चढ़ना आसान होगा यदि उसका तल दीवार से लगभग पाँच फीट की दूरी पर हो." पाइथागोरस ने सोचा, "पेप्रोस ने कहा था कि दीवार 12 फीट ऊंची थी."

उसने मिट्टी में एक त्रिकोण बनाया और लिखा $5^2 + 12^2 = ?$

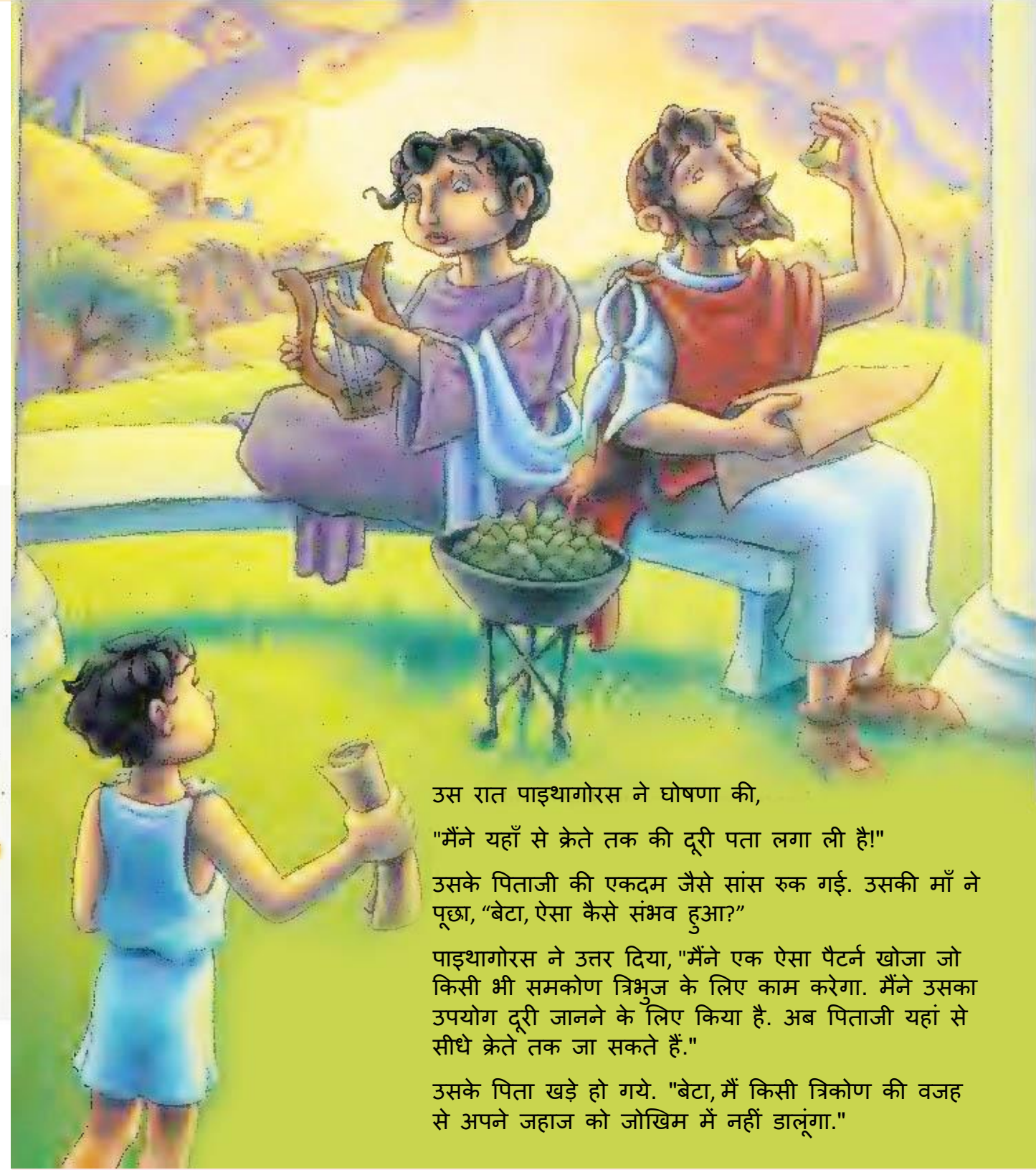
$$25 + 144 = 169$$

$$169 = 13 \times 13$$

"बस! सीढ़ी 13 फीट लंबी होनी चाहिए." उसने सीढ़ी ठीक की और फिर घर चला गया।



घर पर पाइथागोरस ने एक नक्शा निकाला। उसने उसे करीबी से देखा। "मुझे आश्चर्य है..." उसने खुद से कहा।



उस रात पाइथागोरस ने घोषणा की,

"मैंने यहाँ से क्रेते तक की दूरी पता लगा ली है!"

उसके पिताजी की एकदम जैसे सांस रुक गई। उसकी माँ ने पूछा, "बेटा, ऐसा कैसे संभव हुआ?"

पाइथागोरस ने उत्तर दिया, "मैंने एक ऐसा पैटर्न खोजा जो किसी भी समकोण त्रिभुज के लिए काम करेगा। मैंने उसका उपयोग दूरी जानने के लिए किया है। अब पिताजी यहां से सीधे क्रेते तक जा सकते हैं."

उसके पिता खड़े हो गये। "बेटा, मैं किसी त्रिकोण की वजह से अपने जहाज को जोखिम में नहीं डालूंगा।"



"पिताजी -" पाइथागोरस ने समझाना शुरू किया. उसी समय, साल्टोस और पेप्रोस तेजी से हाँफते हुए अंदर आए, मानो वे एक पहाड़ी चढ़कर आए हों.

पेप्रोस ने पाइथागोरस से कहा, "लगता है तुमने हमारी सीढ़ी के साथ कुछ किया है!"

"क्या पाइथागोरस तुम्हें फिर से परेशान कर रहा है?" पिताजी ने अपनी तयोरियाँ चढ़ाते हुए पूछा.

साल्टोस ने अपना सिर हिलाया, "नहीं, उसने हमारी सीढ़ी बिल्कुल सही लंबाई की बना दी है. अब हम छत पूरी कर पाएंगे."

पेप्रोस ने आगे कहा, "तब हमें केवल स्तंभों के टेढ़े-मेढ़े आधारों को ठीक करना होगा."

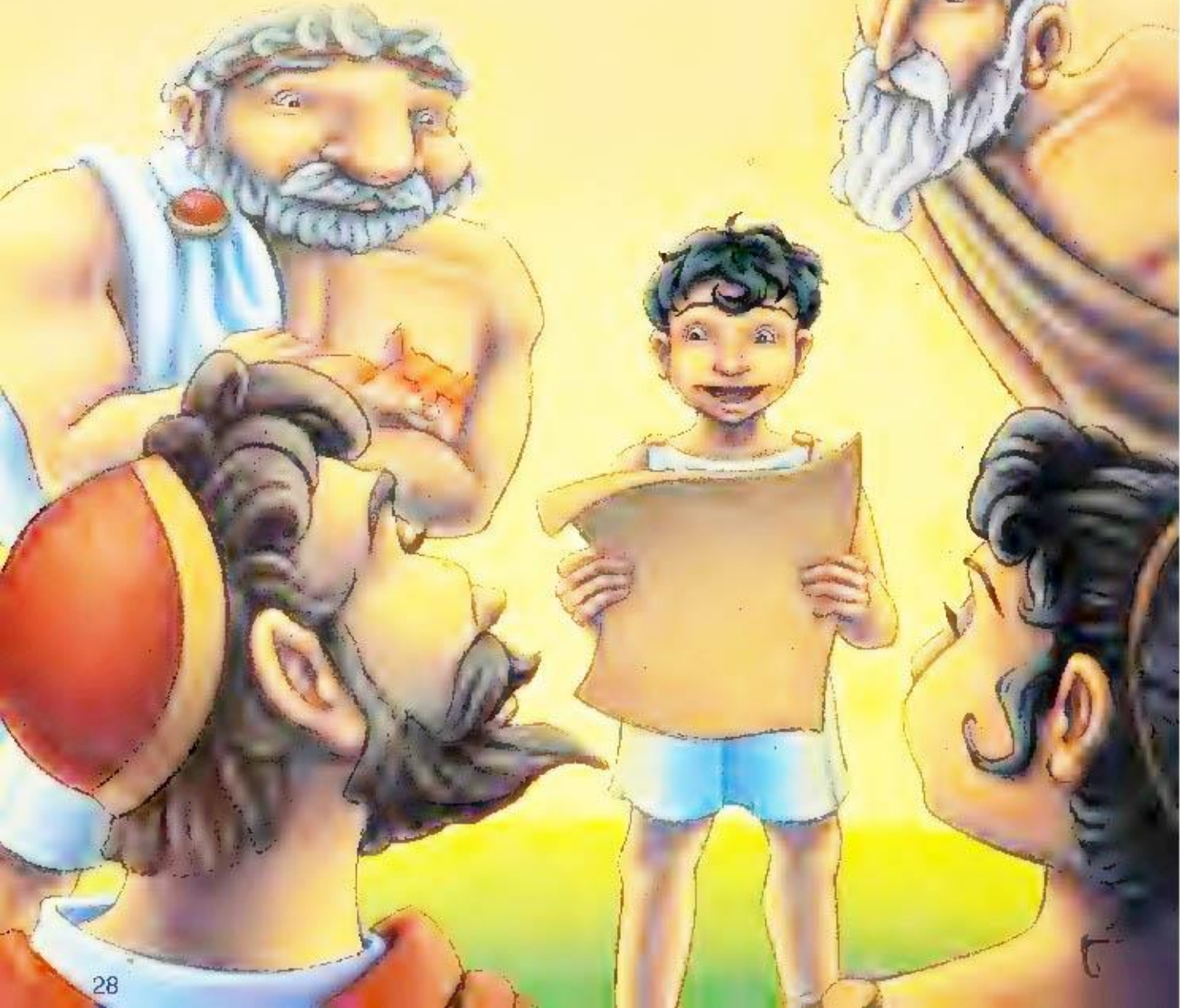


"शायद मैं उसमें आपकी मदद कर सकता हूँ," पाइथागोरस ने पेशकश की. "समकोण बनाने के लिए आप लोग मेरी रस्सी का उपयोग करें. यदि आप आधारों को सीधा बनाने के लिए समकोण का उपयोग करेंगे तो स्तंभ सीधे खड़े होंगे."

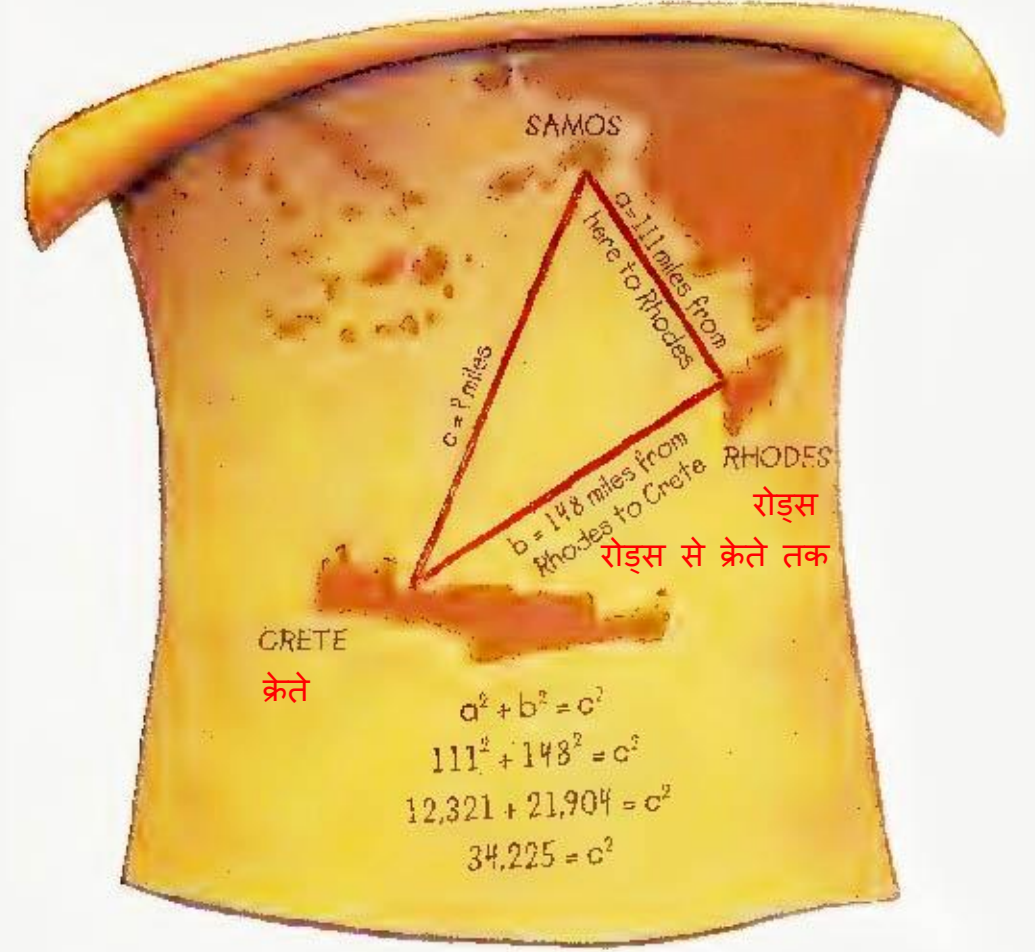
साल्टोस हँसा. "बहुत बढ़िया! अब हम मंदिर का काम समय पर पूरा कर पाएंगे. तुम जब मंज़ी चाहें आना और हमारी मदद करना. तुम्हारा हमेशा स्वागत होगा."

पाइथागोरस के पिता ने कहा, "बेटा, अच्छा होगा अगर तुम मुझे यहाँ से क्रेते की दूरी बताओ।"

पाइथागोरस ने समझाया, "हमारा द्वीप, समोस, रोड्स और क्रेते के साथ एक समकोण त्रिभुज बनाता है. यदि मैं त्रिभुज की भुजाओं को a , b , और c नाम देता हूँ, तो मैं यह पता लगाने के लिए कि यहाँ से क्रेते तक की दूरी कितनी है अपने समकोण त्रिभुज पैटर्न $a^2 + b^2 = c^2$ का उपयोग कर सकता हूँ."



"आप देख सकते हैं कि कैसे $a^2 + b^2 = 34,225$ होगा."



"यहां और क्रेते के बीच की दूरी c को खोजने के लिए, मुझे यह पता लगाना था कि किस संख्या को खुद से गुणा करने पर मुझे 34,225 मिलेगा।"

"मैं पहले से ही जानता था कि $148^2 = 21,904$. लेकिन वो संख्या बहुत छोटी थी।"

"मैंने 200 की कोशिश की, लेकिन $200^2 = 40,000$. वो संख्या बहुत बड़ी थी।"

"मैंने 180 की कोशिश की, और 180^2 जो 32,400 के बराबर है. वो अधिक करीब थी!"

"फिर, मैंने 185 को 185 से गुणा किया. वो बिल्कुल 34,225 निकली. तो, हमारे द्वीप से क्रेते की दूरी 185 मील है."



हर कोई चकित था. पाइथागोरस के पिता ने उसकी पीठ थपथपाई. "अच्छी सोच है, बेटा! तुम किसी दिन ज़रूर एक अच्छे व्यापारी बनोगे."

पाइथागोरस की माँ ने धीरे से कहा, "शायद वो अपने तेज़ दिमाग का इस्तेमाल अन्य चीजों के लिए भी कर सकता है."

उसके पिता ने सिर हिलाया. "बेटा, अपनी स्पष्ट सोच के साथ, तुम एक जनरल, एक सीनेटर, एक शिक्षक जो चाहो बन सकते हो. वो तुम्हारी मर्जी पर निर्भर करेगा."

पाइथागोरस मुस्कुराया. उसे भविष्य में भी कुछ महान कार्य करने की आशा थी.



कुछ दिनों बाद, पाइथागोरस ने अपने पिता की नाव को बंदरगाह में आते हुए देखा.

उसके पिता उसका स्वागत करने के लिए दौड़े.

"पाइथागोरस, तुम बिल्कुल सही थे! मैं रिकॉर्ड समय में क्रेते पहुंच गया," पिता ने अपने बेटे को गले लगाते हुए कहा.

पाइथागोरस ने अपने पिता की ओर देखा और कहा, "आप भी सही थे. मुझे बस यह सीखना था कि चीजों को सही कोण से कैसे देखा जाए."



ऐतिहासिक नोट

पाइथागोरस का जन्म 569 ईसा पूर्व के आसपास ग्रीक द्वीप समोस पर हुआ था. उनके बचपन की वास्तविक घटनाएँ अज्ञात हैं. उन्होंने मिस्र और मध्य पूर्व की यात्रा के बाद दक्षिणी इटली में एक स्कूल की स्थापना की. वो एक दार्शनिक, संगीतकार और खगोलशास्त्री थे, लेकिन उन्हें एक गणितज्ञ के रूप में सबसे ज्यादा याद किया जाता है. उनकी सबसे प्रसिद्ध खोज वो है जिसे अब हम पाइथागोरस प्रमेय कहते हैं:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

जब a और b एक समकोण त्रिभुज के दो पैर हैं, और c समकोण के विपरीत भुजा है.

